

錯覚や意外性を取り入れた図形の指導
—小学校の数学的活動—

柿原聖治

愛知東邦大学

錯覚や意外性を取り入れた図形の指導

— 小学校の数学的活動 —

柿原 聖 治*

目次

1. はじめに
2. 立方体に見える
3. 短く見える
4. 広く見える
5. おわりに

1. はじめに

新学習指導要領では、生きて働く「知識・技能」の習得、未知の状況にも対応できる思考力・判断力・表現力等の育成、学びに向かう力・人間性等の涵養が3つの柱とされている。また、どのように学ぶかということも重視されており、アクティブ・ラーニングによる主体的な学びを達成するための授業課題を開発していくことがますます必要になっていく。

小学校の算数では、従来の「算数的活動」から「数学的活動」に名称が変更され¹⁾、算数科の目標にある、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けさせること、また、数学的活動の楽しさや数学のよさに気付かせること、が求められている。

図形に関する問題は、具体物と向き合って、そこに規則性を発見したり、これまで身に付けた知識を生かして解決したりする楽しさを味わうことができるという特徴がある。さらに、錯覚や意外性のある問題を取り入れることで、その特徴を生かせるのではないかと考えた。

そこで、本研究では、身に付けた知識・技能を活用した主体的な学びを促すことに役立つであろう、錯覚や意外性のある図形の問題を集め、提案することを目的とする。

この内容は、教育学部の3、4年の約120名に対して授業実践した。

2. 立方体に見える

実物は、図1左のように凹んだ立体ある。それに格子線を入れると、飛び出たように見える錯覚が起こる。この錯覚を用いた問題例を挙げる。

まず、図1左のように凹んだ立体と、それに格子線を入れた図1右の立体を数個示した。この立体を作るにはどうしたらよいか問うた。単純に線を入れればよいと考えるので、その展開図

* 愛知東邦大学教育学部

(図2) とそれを組み立てた作品を見せた。すると、凹んだようには見えず、完成品と違うことが分かる。

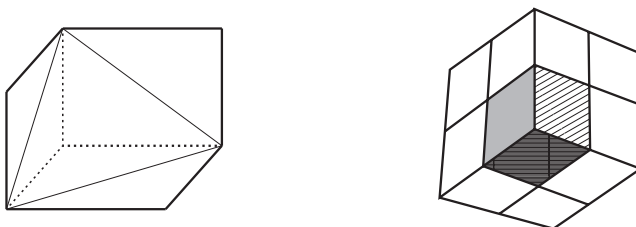


図1 Magic Floating Cube

そこで、図1右を解体して、その展開図を示した。単に基盤の目のように格子線を入れても立方体に見えない。立方体に見えるようにするには、透視図法で使う消失点を考慮して作図する必要があることを伝えた。

図3のような手順で、線を描き入れる²⁾ と、奥行きがあるように見える。ということは、図1左の3つの面にも、図3右のような格子線を入れると、錯覚が起こり、立方体のように見えるということになる。

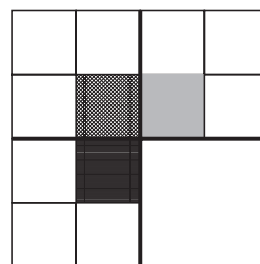


図2 単純な展開図

今回の作図においても、厳密にするには消失点が必要であるが、簡単にするため、中点を使うことを伝えた。そこで中点を見つける課題を示した。

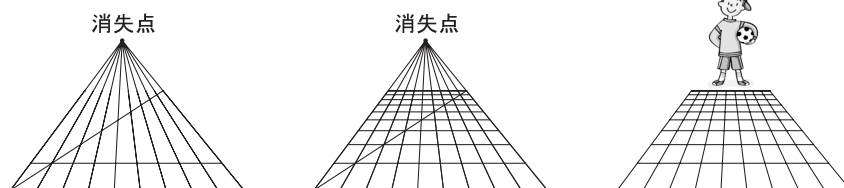


図3 透視図法

2.1 中点の見つけ方

図4左のように、正方形を4つ描いた用紙を学生に渡す。1つの正方形に斜線を入れ(中央図)、その線上の任意の点から頂点に向かって線を引かせる(右図)。

[課題] この線分を2等分しなさい。ただし、定規の目盛りは使わない。

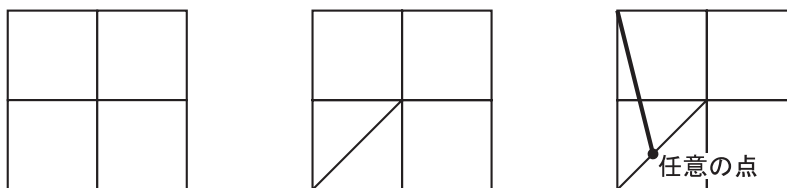


図4 線分の中点を見つける課題

ヒントとして、小学校6年の「図形の拡大と縮小」で学習する相似比の考えを示す（図5）。

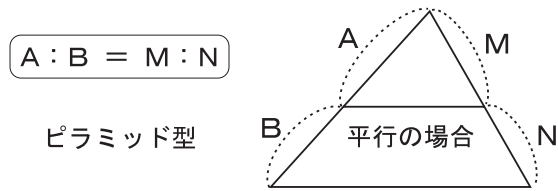


図5 三角形の相似比

この相似比の考えを用いて1本の補助線を引くと、同じ割合で線分を区切ることができる。

この課題の場合は、中点を探したいので、 $A : B = 1 : 1$ となる。すると、 $M : N$ も $1 : 1$ になり、中点が求まる。そのためには、三角形を見つけ、平行線を1本引けばよい。

学生には、このヒントをもとに、図4右において、どこが $1 : 1$ になっているか、どこに三角形をつくれればよいか、発問した。このヒントで、分かった者が現れて、周りの者にも教えていた。しかし、全員には難しかったので、解説を加えて、全員に徹底させた。

三角形を決めて、平行となる補助線を引く（図6左）。2本の斜線は平行で、三角形の左側は $1 : 1$ になっているので、右側も $1 : 1$ になり（中央図）、交点が中点となる（右図）。

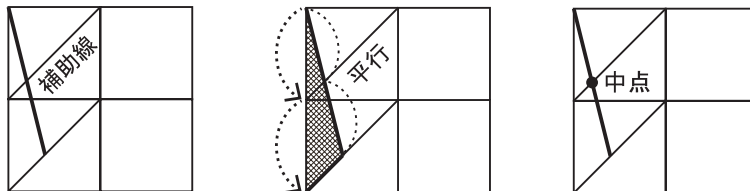


図6 中点の見つけ方

2.2 作製の方法

この考え方を使って、これから図1の作品を作製していく。

作図の途中は、何をやっているのか分からない学生が多い。そこで、全体像を図7で示した。二点透視図法によって、格子線を引いている。ここでは、消失点の代わりに、中点を用いる。

16個の正方形を描いた用紙を学生に渡す（図8左）。これから変形した格子線を入れていく。その際、図6の中点を見つかる方法が必要になる。まず、十字と×印を入れさせる（図8中央）。2本の斜線を加え、中点を見つらせる（右図）。

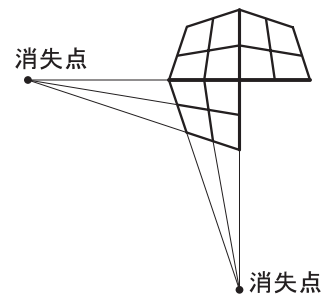


図7 二点透視図法

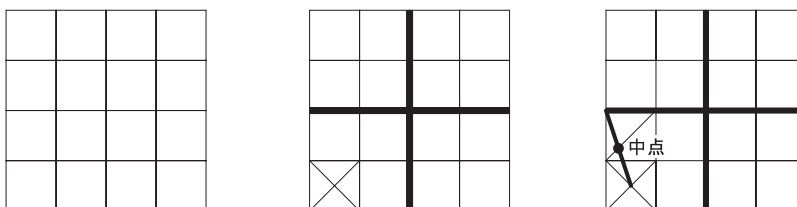


図8 作り方(1)

同様に描いていく（図9左と中央）。中点を求めるため、斜線を3本加える（右図）。

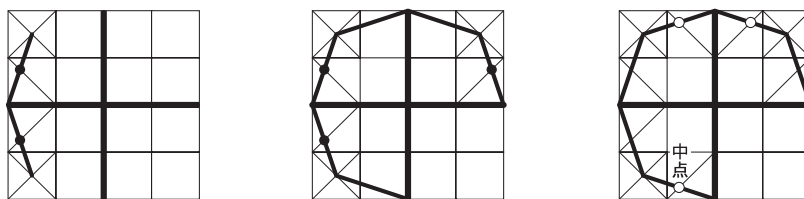


図9 作り方(2)

最後に、線を入れていく（図10左と中央）。糊しろを加え、中央部に色づけをする（右図）。

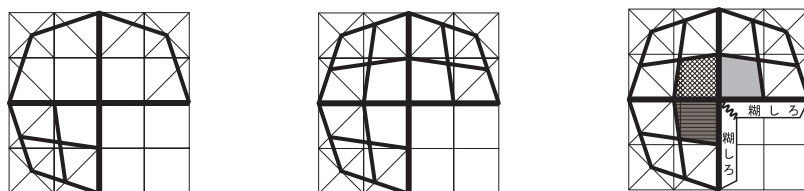


図10 作り方(3)

十文字に強く折り目を付け、外枠を切り取る。中央部を凹ませ、糊付けすると、図1が出来上がる。着色した中央部に注目しながら、首を振って視線を動かすと、立方体に見える。

どうしても立方体に見えないという学生がいる。そのときは、いろいろ考えさせて、立方体に見えるように工夫させた。その際、立方体に見える完成品や友達の商品を見せ合って、自分の作品との差異を見つけさせた。例えば、

- 中央部の着色を、蛍光ペンで塗る。中央部がより鮮明になり、解決することが多い。
- スマートフォンのカメラを通して見る。見えたとき、学生は感動の声を上げる。
- 線を太く描く。遠近感が出て、有効に働く。

これらの作図では、最初の正方形を濃く描いているが、実際には、非常に薄く印刷したものをういなければならない。濃いと、その線が邪魔をして、立方体に見えにくい。

3. 短く見える

斜線は、横線や縦線と比べて短く感じる。この錯覚を用いた問題例を挙げる。

3.1 ルート長方形

身近なものを使った方がよいので、新聞のチラシを用いた。ただし、すべてのチラシがルート長方形であるとは限らないので、事前に調べておく必要がある。

新聞のチラシを各学生に配布する。正方形を折らせる（図11左と中央）。戻してから、用紙の長辺の長さ、斜線の長さは、どちらが長い、考えさせた。

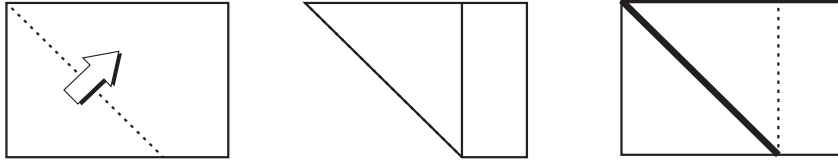


図11 チラシを折る

用紙の長辺の方が長いと答えるが、同じ長さである。これには皆が驚く。斜線の方がどうしても短く感じる。

〔課題〕 定規を使わないで、斜線と長辺の長さが同じであることを調べる方法を考えなさい。

隣の人のものを借りて、比べる学生がいる（図12）。これでいいが、1枚の紙だけでも比べることができる。その方法をさらに考えさせた。あと2通りがある。

単に折るだけで分かる（図13）。簡単なようだが、3通りすべてはなかなか思いつかない。少し時間がかかる。

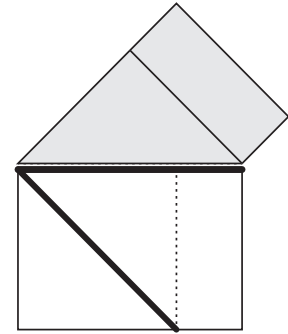


図12 チラシの長さの比べ方

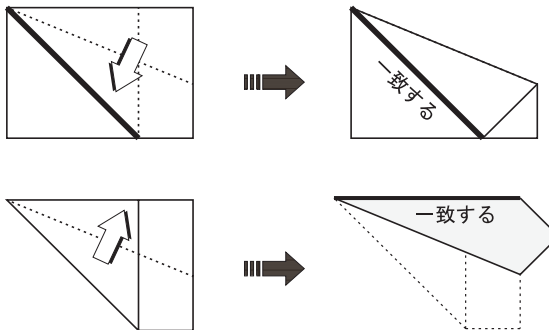


図13 2通りの比べ方

コピー用紙でも、このように折ることができる。長方形の短辺を1 cmとした場合、長辺は何cmになるか、発問して考えさせた。直角二等辺三角形の辺の比 $1 : 1 : \sqrt{2}$ （図14左）から、斜辺は $\sqrt{2}$ cmになる。その斜辺と長辺が一致することから、長辺も $\sqrt{2}$ cmになる（右図）。短辺と長辺の比が $1 : \sqrt{2}$ になる長方形を、ルート長方形、または $\sqrt{2}$ 長方形、白銀長方形ということを教えた。

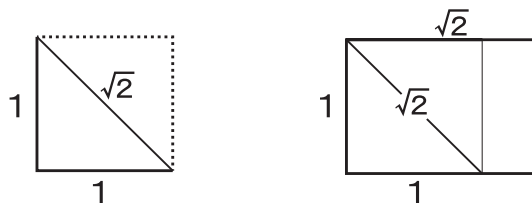


図14 正方形とルート長方形

さらに、この活動の数週間後に、今度はコピー用紙を配布して「できるだけ大きい二等辺三角形を折りなさい」という課題を出した。図15左のように単純に半分に分けたり、図14左のように直角二等辺三角形を作ったりするので、他にも折り方があることを言って再考させた。ヒントとして、数週間前の学習内容を思い出すように言った。斜線と長辺の長さが一致することを思い出せば作れる（中央図）。その際、角がちょうど重なることに学生は驚いていた（右図）。

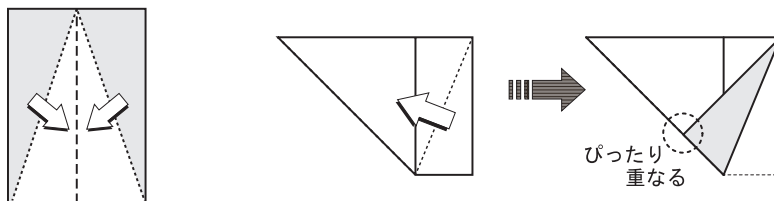


図15 二等辺三角形づくり

対照的に理解させるため、コピー用紙以外の紙で同様のことをさせた。一致しないことが分かる。これから、コピー用紙の縦・横の比が特殊な比になっていることを実感させた。この比が、どういう意味を持っているかは、次の項目の白銀比で考えさせた。

補足的に、2種類の二等辺三角形の面積を求める課題を与えた。長方形の短辺を1 cm、長辺を $\sqrt{2}$ cmとして面積を求め、どちらの三角形が大きいかを考えさせた。学生は、図15左の三角形の面積はすぐに求めるが、右図の方は難しく考える。ピタゴラスの定理などを使って底辺、高さを求めようとする。小学生でも解ける解法を考えるように言った。すると、長方形から2つの直角三角形を引く方法を考えた。これでもいいが、もっと簡単に求めることができることを言って、考えさせた。図16のように、それぞれの三角形は面積が等しいので、二等辺三角形の面積は、長方形の半分の面積になる。図15左の二等辺三角形も、長方形の半分の面積である。したがって、2種類の二等辺三角形の面積は等しくなる。

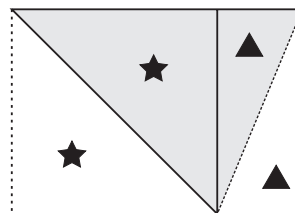


図16 二等辺三角形の面積

3.2 白銀比

コピー機で拡大・縮小するとき、倍率が2倍、1.5倍、0.5倍など、きれいな数の倍率がない。1.41倍、1.22倍、0.71倍など、半端な数しかない。どうしてなのか、問うた。

ヒントとして、2倍や0.5倍にするとどうなるか、考えさせた。さらに、相似比と面積比の関係思い出させた。

2倍にするということは、相似比が1:2である。面積比はその二乗になるので、1:4になってしまう。折り畳んだ新聞紙を開いてみせて、4倍になると、いかに大きくなるか実感させた。0.5倍にすると、1/4の大きさになり、あまりに小さくなる。このように、とてつもなく大きくなったり、小さくなったりして、使い勝手が悪いことを理解させた。

面積を2倍にしたい場合は、相似比を何倍にすればよいか、発問した。 $\sqrt{2}$ 倍にすればよい。

つまり、 $1^2 : (\sqrt{2})^2$ で $1 : 2$ になり、拡大率は $\sqrt{2} \approx 1.41$ 倍で、これがコピー機に設定されている。面積を半分にしたい場合は、 $1/\sqrt{2} \approx 0.71$ 倍にすればよい。製品規格により、コピー用紙の A 判の 1.5 倍（面積）が、B 判である。したがって、A 判から B 判に拡大したい場合は、 $\sqrt{1.5} \approx 1.22$ 倍すればよい。

コピー用紙の縦・横の比は、特別な比（ $1 : \sqrt{2}$ ）になっている。この比は白銀比という。半分に折っても、縦・横の比は変わらない。何度半分に折っても縦・横の比は不変である（図17）。これは小学校6年で扱い、教科書に載っている。 $\sqrt{2}$ の代わりに、1.41を使っている。「B 4判の紙は、B 5判の紙の何倍の拡大図といえますか」という問題と図が載っていて、相似比と面積比の関係について、考えさせている³⁾。

身近にあるもので、白銀比になっているものを探しなさい、という課題を出した。ノート、書籍、郵便はがき、新聞紙が該当する。その際、黄金比（ $1 : 1.62$ ）にも言及した。

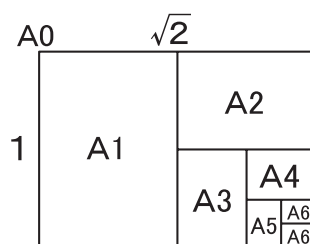


図17 コピー用紙の大きさ

3.2 正方形の対角線

〔問題〕 図18のように、2つの正方形の間に円が接している。着色部の面積を求めよ。

これがなかなか正解者がいない。図19左のように補助線を引き、それが10cmであると気づかない。錯覚が起こる。斜線の方がどうしても短く見えてしまう。右図のように等積移動すると、同じ長さであることがすぐに分かる。しかし、試験問題を変えて解くという考えはなかなか思いつかない。

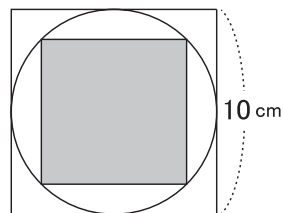


図18 面積を求める問題



図19 太線2本の長さの比較

学生は、図19左の補助線を引くところまで到達しない。どうしても正方形の一辺の長さを求めようとして、迷路にはまってしまう。そこで、スモール・ステップで、ヒントを与えていく。

この問題は、分かる学生はすぐに解けるが、分からない学生は徹底して分からない。

そこで、「そもそも円があったら、まず中心を探す。そのために、対角線を引く」と教えた。図20左のように、外側の正方形の頂点から対角線を引く学生がいる。求めたいのは、中の正方形の一辺である。よって中央図のように、中の正方形の頂点から対角線を引くように言った。それから、対角線の長さを求めるように言った。それでも、難しい。

図20中央では、左図と比べて対角線が短く、外の正方形とのつながりがなくなったように思える。そこで、右図のように十文字を引かせ、外の正方形との接点を作り、考えさせた。

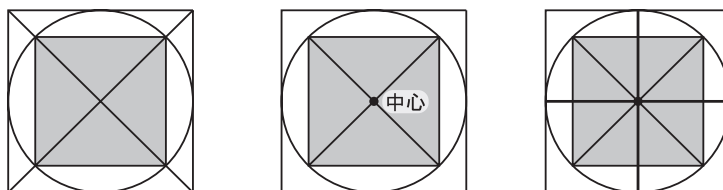


図20 補助線の引き方

各補助線は円の中心を通っていると言うと、全員の学生が気づく。図21左で、対角線は円の直径でもあるから、右図のように、動かすことができ、2本の線は同じ長さであることが分かる。

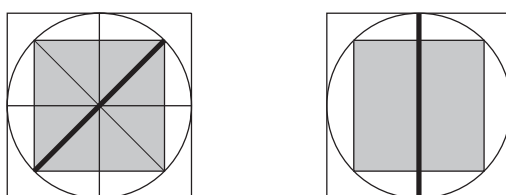


図21 補助線の見方

対角線が10cmと分かった後は、その面積を求める。正方形なので、2本の対角線は直交する(図22左)。まず三角形の面積を求める(中央図)。底辺10cm×高さ5cm÷2。これが2個あるので、2倍して50cm²となる。

別解：10cm×10cmは大きな正方形の面積になる(図22右)。求める面積はその半分であり、50cm²となる。この解法は、小学校5年で学習する「ひし形の面積」の求め方にすぎない。

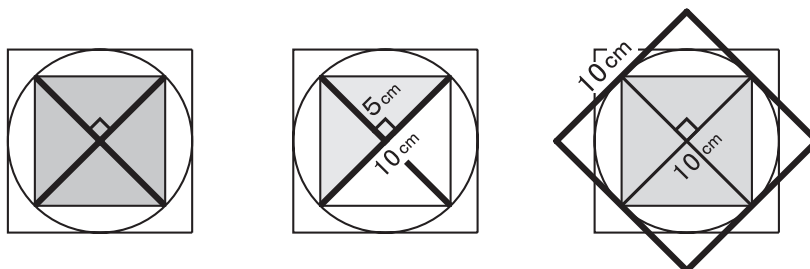


図22 面積の求め方

この問題は、小学校教員採用試験(北海道2003年度)でも使われている。

中学校で学習する、直角二等辺三角形の辺の比 $1 : 1 : \sqrt{2}$ を使っても解けるので、学生にはその解法もいくつか考えさせた。そのために、配布するプリントには、同じ図形を2つ印刷したものを用了。

図22の解法はルートを使わないので、小学生も解ける。したがって、中学校入試問題でも、同様な問題(関西大学中等部2017年度)が出されている(図23左・上段)。

中の正方形を45°回転させる（図23中央・上段）。補助線を引くと、中と外の面積が等しいことが分かる（右図・上段）。学生が考えた別解もある。補助線を引き（左図・下段）、等積移動する（中央図・下段）と、右図・上段と同じになる。

さらに別解として、中の正方形の面積を求めて、外の正方形から引くこともできる。そうすると、解法は図22の問題と同じになる。

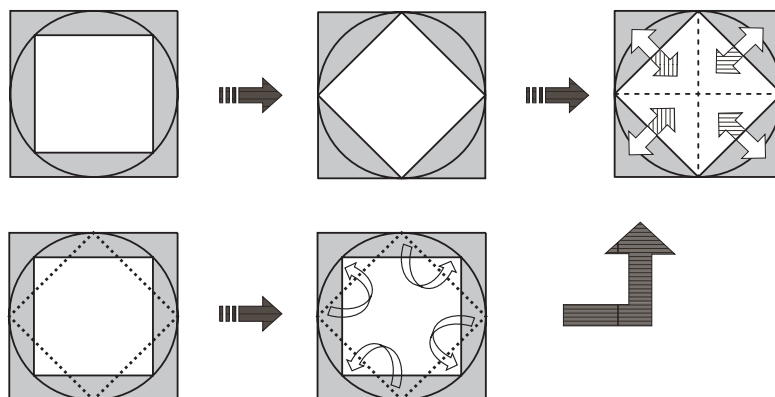


図23 面積を求める問題と、解法

4. 広く見える

一塊になると、面積が大きいように感じる。この錯覚を用いた問題例を2つ挙げる。これまでの問題よりも計算は簡単であるので、簡潔に述べる。

4.1 同心円

半径を同じ割合で増やし、5つの同心円を描かせる（図24左）。

[問題] 中心の3つの円と、外側の輪の面積は、どちらが大きいか（図24中央と右）。

半径を1として計算させる。中央の円の面積が $3^2\pi$ 、外側の輪の面積が $5^2\pi - 4^2\pi$ で、同じ面積であることが分かる⁴⁾。小学校段階では、 π の代わりに3.14を使えばよい。

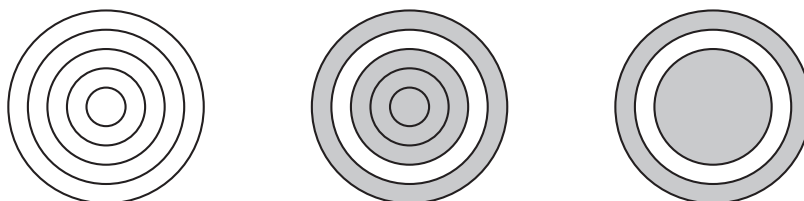


図24 同心円の面積

4.2 正方形のパズル⁵⁾

方眼紙を使う。一辺12cmの正方形を4ピースに切り取ってパズルを作らせる（図25左）。並べ替えると、12.2cmの正方形になる。中央に2.2cmの正方形の穴が開く（右図）。

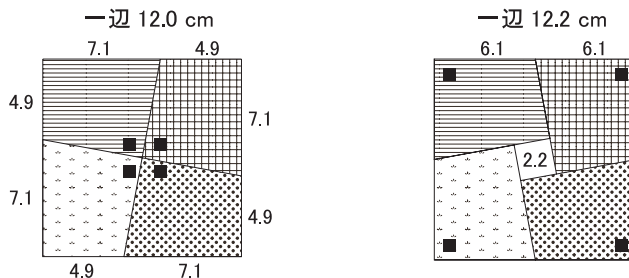


図25 正方形のパズル

これを描き直すと、図26になる。幅 1 mmの外枠の面積と、一辺2.2cmの正方形の面積が等しくなる。これには皆が驚く。計算させると、同じ面積であることが分かる。

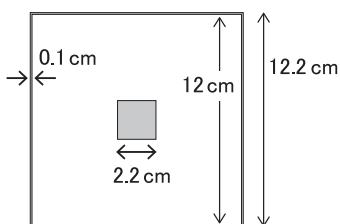


図26 外枠と、中の正方形の面積

5. おわりに

単なる作品づくりや作図の問題に終わらせないように、算数の知識を使って解けるような課題にした。一見単純に見えるが、根底には算数の原理があり、工夫できる余地のある活動にした。1つの解法だけでなく複数の解法を考えさせることで、多角的に考えさせるようにした。

「立方体に見える」作品づくりにおいては、最初だけは教員の誘導が必要になるが、その後は、学生は興味をもって作品に取り組み、主体的な学びを促すことができた。作品の完成時には、驚きの声を上げていた。

「短く見える」活動では、一部にルートの考えが必要であり、中学校レベルを含んでいる。しかし、小学校の教科書でもルートを回避した記述になっていて、工夫すると、何とか小学校レベルの知識・技能で収めることができた。そのためには、学生に小学校の知識で解くように促す必要がある。身近な物に、意外な工夫が施されていることを、学生に感じさせることができた。

「広く見える」活動では、同じ面積のものが、狭く見えたり広く見えたりする。見かけに惑わされず、計算して確認する必要があることを学生に学ばせた。作図の後に、パズルづくりを行わせて、数学的活動の楽しさを味わわせることができた。

錯覚や意外性を含む問題は、確かに学生を引きつける力があるが、どこを学生にしっかり考えさせたいのかという狙いを明確にした問いを考えるのが大変だった。

文献

- 1) 文部科学省、『小学校学習指導要領解説(平成29年告示) 算数編』、日本文教出版、p.8、2018.
- 2) マイク・アスキュー、シーラ・エバット著；緑慎也訳、『幾何学ーピタゴラスの定理からメビウスの帯まで』、創元社、p.143、2012.
- 3) 清水静海ほか、『わくわく算数6』、啓林館、p.247、2016.
- 4) D. ウェルズ著、宮崎興二 [ほか] 訳、『不思議おもしろ幾何学事典』、朝倉書店、p.28、2002.
- 5) 柿原聖治、「パズル作りを取り入れた算数的活動」、『東邦学誌』、第46巻 第2号、p.111、2017.

受理日 平成30年10月3日