東邦学誌第46巻第2号抜刷
２０１７年１２月１０日発刊

パズル作りを取り入れた算数的活動

柿　原　聖　治

愛知東邦大学

東邦学誌
第46巻第２号
2017年12月
論　文

パズル作りを取り入れた算数的活動

柿　原　聖　治*

目次

１．はじめに

小学校第３学年の算数的活動として「二等辺三角形や正三角形を定規とコンパスを用いて作図する活動」がある[1)]。第４学年以降もずっと、「定規やコンパスを用いて作図したりする」とあり[2)]、コンパスを使った作図は、小学校段階において重要な学習内容になっている。

しかし、コンパスや定規を使った作図に精通していない学生が多い。単に作図の問題を提示しても、学生はあまり興味を示さなかった。

この研究の目的は、作図に精通した学生を育てるため、ピタゴラスの定理などを扱いながら発展的な学習につなげていく、パズルを取り入れた活動について提案することである。

この研究は、教育学部の３年生67人（２クラス）を対象に実践した。

２．ピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理そのものは中学校第３学年の内容であるが、小学校の教科書にも発展的な内容として載っている[3)]。方眼紙に３：４：５の直角三角形と３つの正方形を書き、マス目からそれぞれの面積を計算させている。これを本稿のようにパズルとして扱えば、どんな直角三角形にもピタゴラスの定理が確認でき、もっと楽しく扱える。

２．１　最も簡単な証明

ピタゴラスの定理の証明はたくさんある。その中で、最も簡単な方法は正方形を用いたものである（図１）。外側の正方形の面積は、４個の直角三角形と中央の正方形の面積を足したものである。これを式で表すと、$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$　整理すると、$a^2+b^2=c^2$ となる。

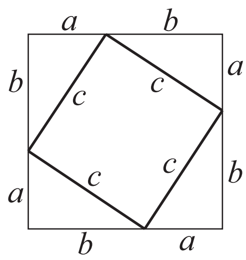


図１．正方形

しかし、次のような問題となると、簡単にはいかない。

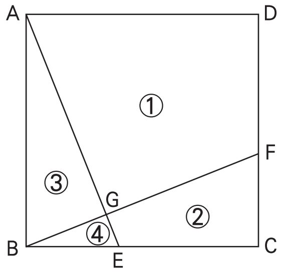
＊　愛知東邦大学教育学部

２．２ 試験問題のパズル

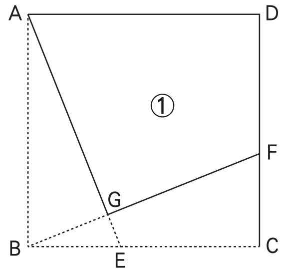
兵庫県2002年度の教員採用試験（小学校全科）に少し変形した問題が出題されている。

【９】 三平方の定理を証明するために、図アのように、正方形ABCDの紙を２つの長さの等しい線分AE、BFで切り、４つの図形①、②、③、④を作った。そして、これらの図形を移動し、平面上に配置して考える。次の問に答えなさい。

図ア



図イ



１ 図アで△ABEの３辺の長さを、AB＝a、BE＝b、AE＝cとして、a、b、c の間に成り立つ等式を書きなさい。

２ 図アで、∠AGF＝90°であることを証明しなさい。

３ １の等式が証明できるように、図形②、③、④を移動して配置した図イを完成しなさい。

図２．教員採用試験の問題

小問３がピタゴラスの定理の証明を求めている。図アで、正方形の面積は a^2 である。これは①〜④を足したものである。図３では、この①〜④を移動させ、さらに一辺 b の正方形を加え、傾いた正方形（一辺が c になる）を作っている。したがって、$a^2+b^2=c^2$ になる。

作図法：Ａ４用紙を折って、正方形を作る（図４左)。余った紙片で、b 部分の正方形を書けば、試験問題と同じパズルができる。コンパスを使って、左側に正方形を作る（図４中央)。大きい正方形に２本の斜線を引く場合も、前と同じ幅に開いたコンパスで交点が求められる（図４右)。定規で長さを測る手間が不要になる。斜線を引いたところにカッターを当てて、小片（ピース）を作る。

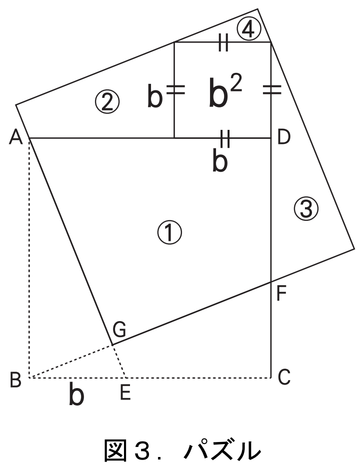


図３．パズル

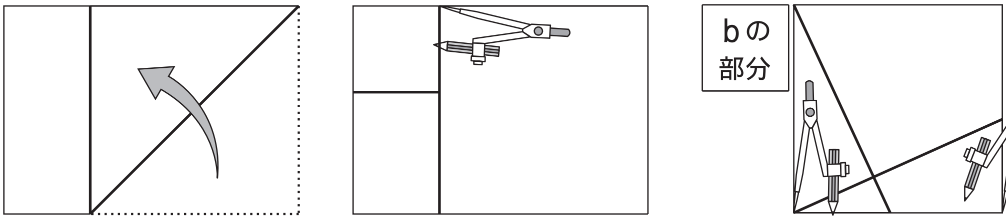


図４．作図法（１）

これで、パズルの出来上がりである。ただし、これはやってみると非常に難しいことが分かる。図イように、ピース①が固定され、点線がある状態だと、少しは簡単になるが、バラバラのピースにすると、困難を極める。

２．３ 簡単なパズル作り

そこで、もっと簡単なパズルに改変する。作図の方法は異なるが、同じパズルになる。

①Ａ４用紙に、定規を使って十文字（90度に交わる２直線）を書く（図５左）。

②Ａ４用紙に３つの正方形を書く（図５右）。小さな図を描く学生が多いので、正方形が入って、なおかつ大きく書くように指導する。小さい場合、パズルとして分かりにくい。

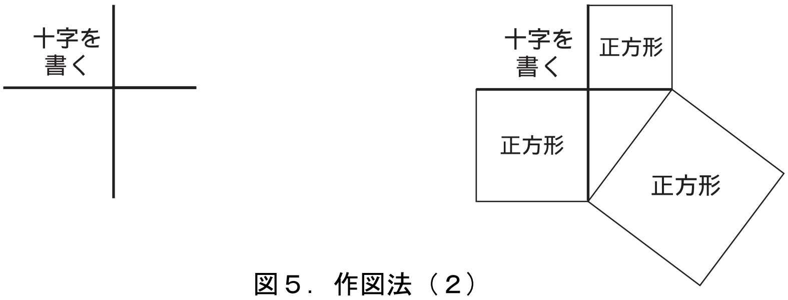


図５．作図法（２）

③図６左のように、定規を固定し、右の定規をスライドさせて、平行な直線を引く。

④延長線を引く（図６右）。切り取ると、出来上がる（図７）。

この活動で、２本の定規で平行線を引く方法も確認させることができる。

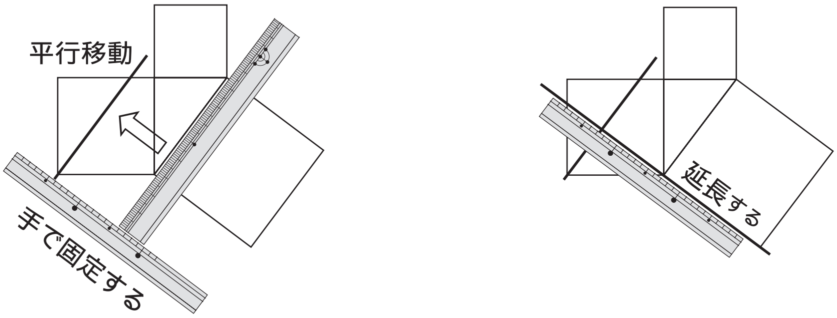


図６．作図法（３）

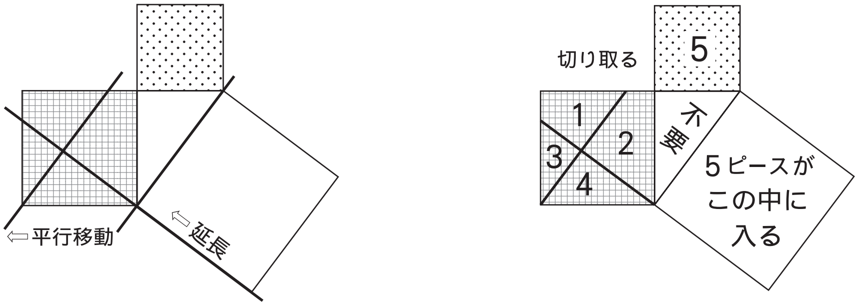


図7．作図法（4）

留意点と、できない学生へのヒント：①不要なピースに「×」印を付ける。そうしないと、紛れ込んでしまうことが多々ある（図7右)。②用紙は表裏が分かるようにする。裏返すと、非常に多くの場合が生じ、成功しにくくなる。「裏返し不要」というヒントを教えるにも、表裏の区別を付けておく。③直交する所に、「○」印を付けさせると、最大のヒントになる（図8）。内側にあった○印が、移動後は外側に来るというヒントを与える。

利点：①前のパズルでは、はめる枠がなかったので、非常に難しかったが、こちらは枠が用意されているので、ずっと簡単になる。②移動して大きな正方形に入ることで、ピタゴラスの定理が数式だけでなく、図形的にも理解しやすい。

できた学生には糊でピースを貼らせて、出席用の課題として提出させた。

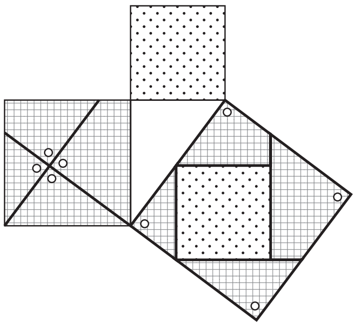


図8．パズルのヒント

2．4 ピタゴラスの定理の発展

ピタゴラスの定理の式において、両辺に定数kを掛けても成立する[4)]。

$$ka^2 + kb^2 = kc^2$$

図9のように、それぞれの正方形にリンゴがきちんと入ると、正方形でなくても成り立つ。同じ比率kで縮小したと考えればよい。

また、kを高さと考えると、ka^2は底面だけ正方形の直方体の体積になる。aとbに対応する底面の直方体に同じ水位の水を入れ、cの直方体に注ぎ込むと、同じ水位になる。立方体では、3つの容器の高さが異なるので、成り立たない。

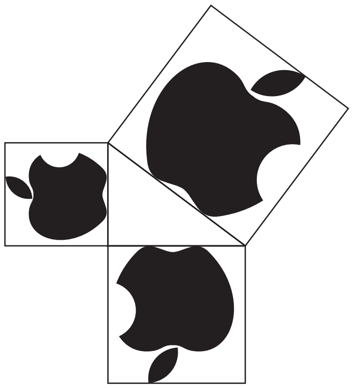


図9．定理の発展

２．５ ヒポクラテスの三日月

図10左で、２つの三日月の面積は、中央の直角三角形の面積に等しくなる。これがヒポクラテスの三日月である。小学校６年でよく扱われる。この問題は計算式でなく、ピタゴラスの定理によって図形的に証明できることを教えた。

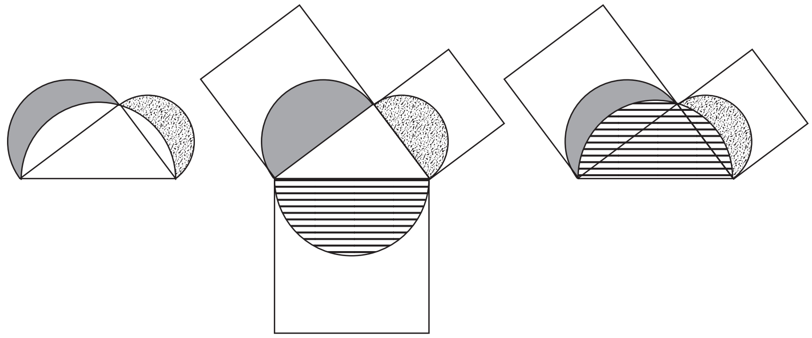


図10. ヒポクラテスの三日月

①２つの三日月は相似形ではないので、まず相似形の半円にする（図10中央左）。
②２つの半円の面積は下部の半円の面積と等しい（ピタゴラスの定理）。
③この下部の半円を上下方向に反転させると、図10中央右になる。
④この半円から左右の円弧を取り除くと、その面積は中央の直角三角形だけになる（図10右）。

学生には、計算式と、コンパスを使った作図の双方で理解させた。

さらに、直角二等辺三角形の場合、三日月の面積は三角形の面積に等しくなる（図11左）。

証明：①半円を反転させる（図11中央左）。②３つの円弧は相似形なので、大きい円弧は小さい円弧２個の面積に等しい（図11中央右）。③小さな円弧２個を切り取ると、三角形の面積になる（図11右）。

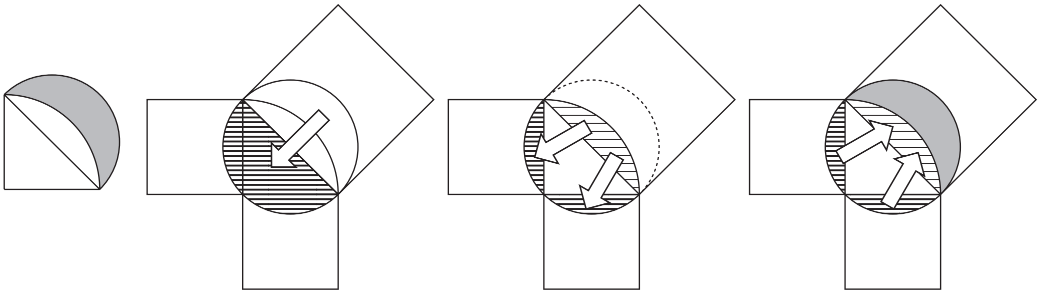


図11. ヒポクラテスの三日月（二等辺の場合）

３．Ｔパズル

次に、作図の楽しさを味あわせるため、Ｔパズル作りを課題として出した。これはシルエット・パズルで、20種ほどの図形を作る問題がよく出題されている。匹見パズルとも呼ばれ、木製のものが市販されている（図12)。この４ピースは定規１本だけで作図できる。定規の上側と下側を使うと、簡単に平行線が引ける（図13左)。

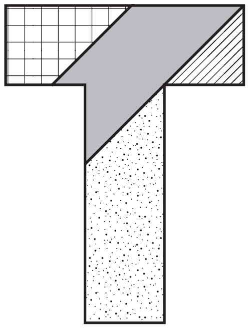


図12. 匹見パズル

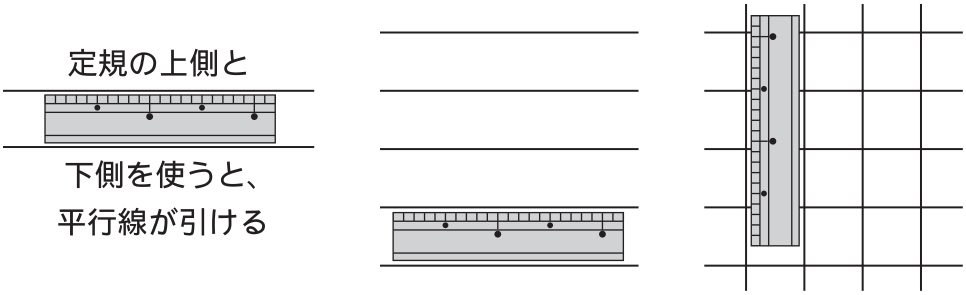


図13. 定規でマス目を作る

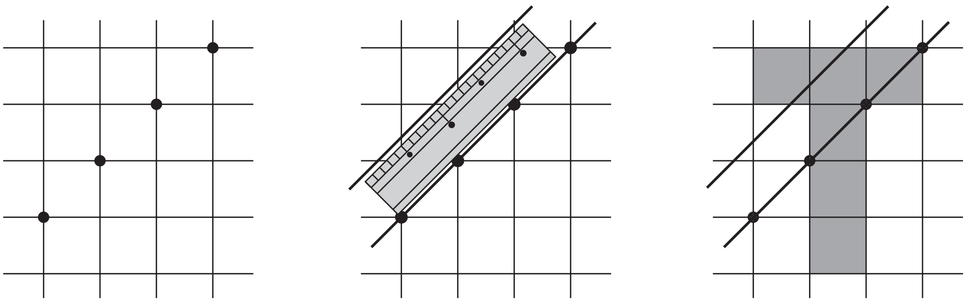


図14. 定規で斜線を引く

①５本の横線を引く（図13中央)。　②４本の縦線を引く（図13右)。
③４個の格子点を打つ（図14左)。　④格子点に定規を合わせて、平行線を引く（図14中央)。
⑤Ｔの形を浮き上がらせる（図14右)。

方眼紙でも書けると思われるが、最後の斜線が引けない。格子の間隔と斜線の間隔を等しくするには、定規の上と下を使ってようやく引ける（$\sqrt{2}$の知識があれば不可能ではない)。切り取った後に、鉛筆の線を消す。線が残っていると、パズル作りの際にその線に惑わされる。

学生がよく作る形に図15がある。紙で作ると、一直線になっているように見える。しかし、市販の木片を使うと、出っ張りがあることが分かる。この他にも、面白い形を作る学生がいるが、微妙な隙間があったりして、ぴったり収まっていない場合がある。

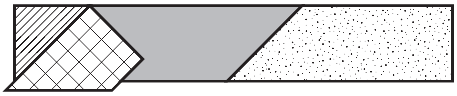


図15. 学生がよく作る図形

４．問題点と発展

紙でパズルを作ると、微妙な隙間があるのか・ないのかが分からない。ぴったりはまっていると思っても、隙間がある場合がある。木片のパズルだと容易に判明するが、紙では微妙な隙間がよく分からない。よく知られたパズルとして図16を示す[5)]。

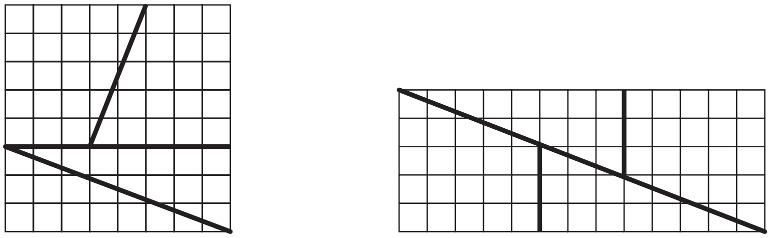


図16. 方眼紙によるパズル

左図の４ピースを並び替えると右図になり、パズルとして完成したように見えるが、実際には収まっていない。左の方眼紙の面積が $8\times8=64$、右が $5\times13=65$ で異なっている。斜線の傾きを計算すると、一直線にならないことが分かる。最長の斜線部分に微小な隙間が生じている。

これは方眼紙を使って学生に体験させた。パズルを完成させて、２つの面積が違うことから、どこに $1\mathrm{cm}^2$ の面積が消えたのかを考えさせる活動に発展させた。

もう一つの例として、一辺 12cm の正方形を４ピースに切り取ったパズルがある（図17左）。並べ替えると、12.2cm の正方形になる。中央に 2.2cm の正方形の穴が開く（図17右）。一辺をほんの 2mm 大きくするだけで、中央に一辺 2.2cm の正方形の穴が開く。$12^2+2.2^2=12.2^2$ これはピタゴラス数 60：11：61を 1/5 にしたものである。これに似たパズルは中学校入試問題にも出題されていて、小学生が解ける問題である[6)]。

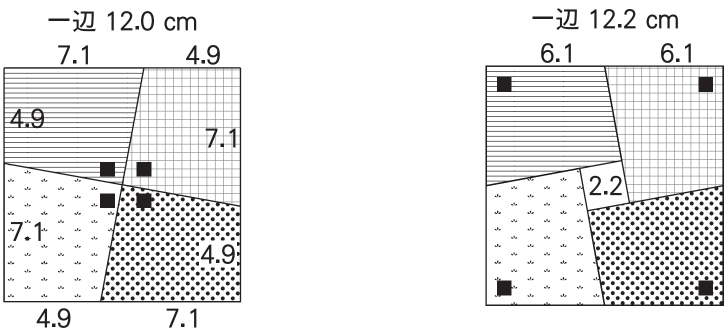


図17. 正方形のパズル

このように、ぴったりはまったと思っても隙間ができたりする。これも発展的な問題として扱うことができる。12cm の正方形に、小さい正方形の穴が開くようにするには、どんな切り方をすればよいかを考えさせる。つまり、4.9cm と 7.1cm の導出を考えさせる（図18）。また、何度回転させれば収まるかも考えさせる。この角度の問題だけは高校数学の範囲になる。しかし、小学校６年で点対称・線対称を学習するので、考え方だけは扱える。この図形はピタゴラス数 60：11：61 なので、$\tan^{-1}(11/60)+180°=190.39°$ 回転させると収まる。図形ソフトを使うと図形の回転も正確にできて、試行錯誤が可能になる。

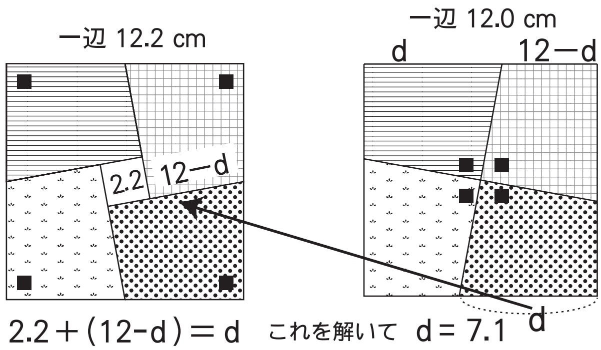


図18. 切り方の計算法

4.65cm と 7.35cm で切る場合は、12.3cm の正方形に 2.7cm の穴が開く。$12^2+2.7^2=12.3^2$　ピタゴラス数 40：9：41 の 3/10 である。$\tan^{-1}(9/40)+180°=192.68°$ 回転させると収まる。

紙でパズルを作ると、微妙な隙間が不明瞭であるが、これを逆手にとって、消えた面積や、増えた面積を探究させる活動に発展させることも可能である。

５．おわりに

「算数的活動」の一環として、この活動を行った。市販のパズルを使うのではなく、パズルそのものを作図させた。学生はコンパスを久しぶりに使うことから、非常に興味深く活動に専念していた。

この活動の最大の長所は、クラス全員が同じパズルを作るのではなく、一人ひとり異なるパズルを作ったことである。長さの指定はせず、作図法だけを教えることで、自分だけのパズルになり、学生は真剣になって活動に取り組んでいった。

さらに、紙で作ることから生じるパズルの問題点（微小な隙間が識別しにくいこと）を逆に利用して、その原因を探らせ、考えさせる問題に発展させることもできた。

文献

１）文部科学省、『小学校学習指導要領』、東京書籍、p.38、2009.
２）文部科学省、『小学校学習指導要領解説 算数編』、東洋館出版社、p.51、2008.
３）清水静海ほか、『わくわく算数６』、啓林館、p.234、2016.
４）Alfinio Flores, Pythagoras Meets Van Hiele, School Science and Mathematics, Vol 93(3), p.152, 1993.
５）坪田耕三、『坪田耕三の切ってはって算数力』、教育出版、p.45、2016.
６）http://jukensansu.cocolog-nifty.com/puzzle/cat23523695/index.html

受理日　平成29年10月２日