東邦学誌第50巻第２号
2021年12月
論　文

黄金比と正多角形の作図法

Method for Constructing the Golden Ratio and Regular Polygons

柿原 聖治
Seiji Kakihara
愛知東邦大学教育学部

黄金比の新しい作図法と、それを発展させた正多角形の作図法を述べる。ひな型となる図形をいったん作図すると、その後は正多角形がコンパスなしで10種類以上も作図できる。

１．はじめに

黄金比の考えは非常に古く、紀元前５世紀まで遡る。しかも、黄金比は、美術品・建築物・インテリアなどの人工物だけでなく、自然界にも数多く見ることができる[1)]。文系・理系を問わず、非常に関心の高いものである。その作図法は複数分かっている[2, 3, 4)]。

本研究では、黄金比の新たな作図法を述べる。それから派生するひな型となる図形を用いると、数多くの正多角形が作図できることを示す。正五角形、黄金長方形、ケプラー三角形の作図法についても言及する。

２．黄金比の作図[5)]

2.1　作図法

図中の○はコンパスの針の位置を示す。図１の①～④は同じコンパス幅である。⑤でコンパスを広げ、⑥でこの幅で区切る。ϕは黄金比で、ϕ =（１＋$\sqrt{5}$）／２≒1.6180である。

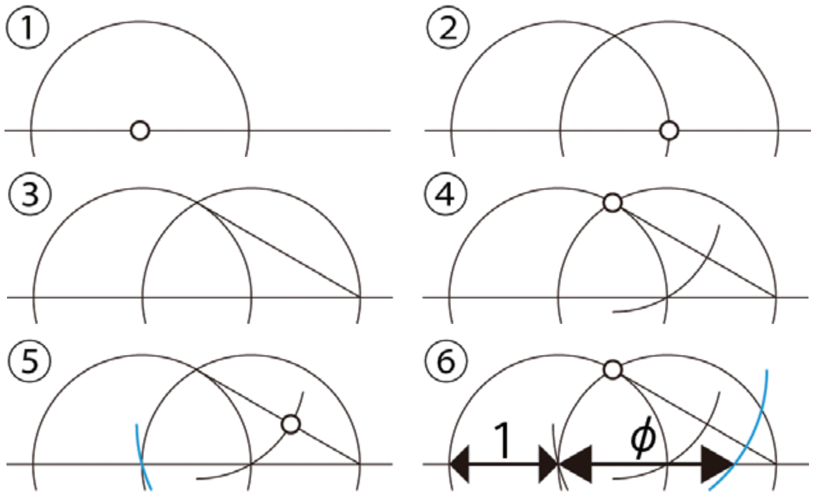

図１　黄金比の作図法

2.2　説明

分かりやすいように、三つ輪を使う。図２の①で、三角形の面積が分かる。②で、面積から高さが求まる。④で、ピタゴラスの定理により、底辺が√5／２になる。⑤で、円の半径と、矢印の間隔が黄金比になる。

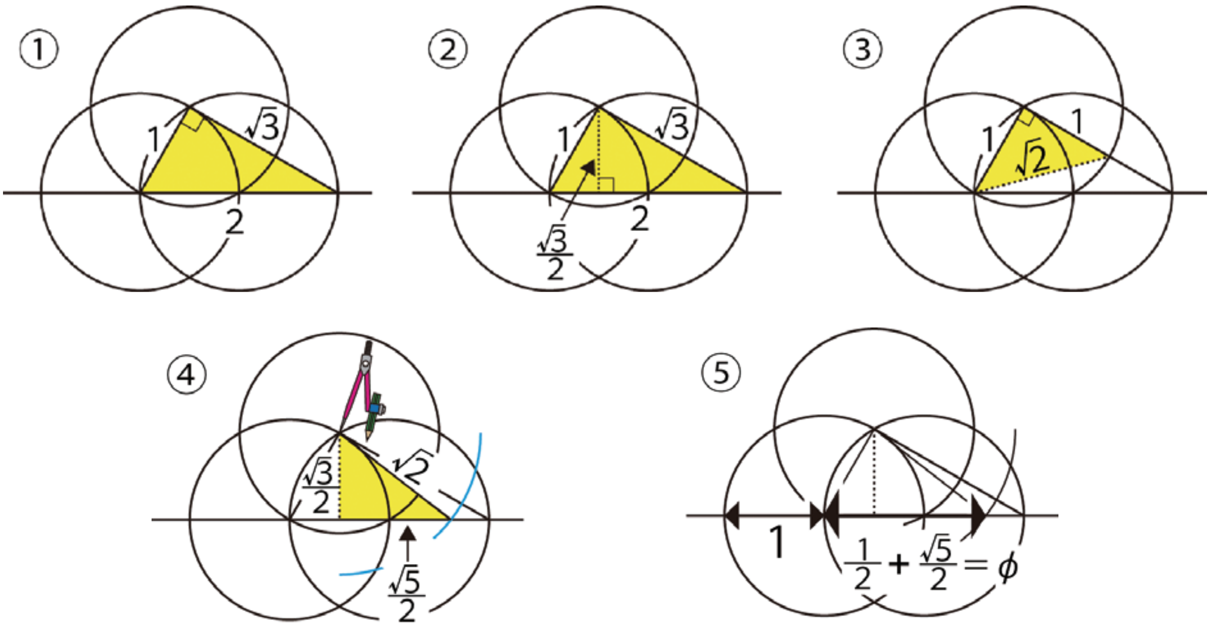

図２　黄金比となる説明

3．正五角形の作図法

図３の①と②で、コンパス幅をφにして、弧を描く。③で、コンパス幅を円の半径に戻し、弧を描く。④で、交点を結ぶと、正五角形が完成する。図３右で、正五角形の性質を示している。

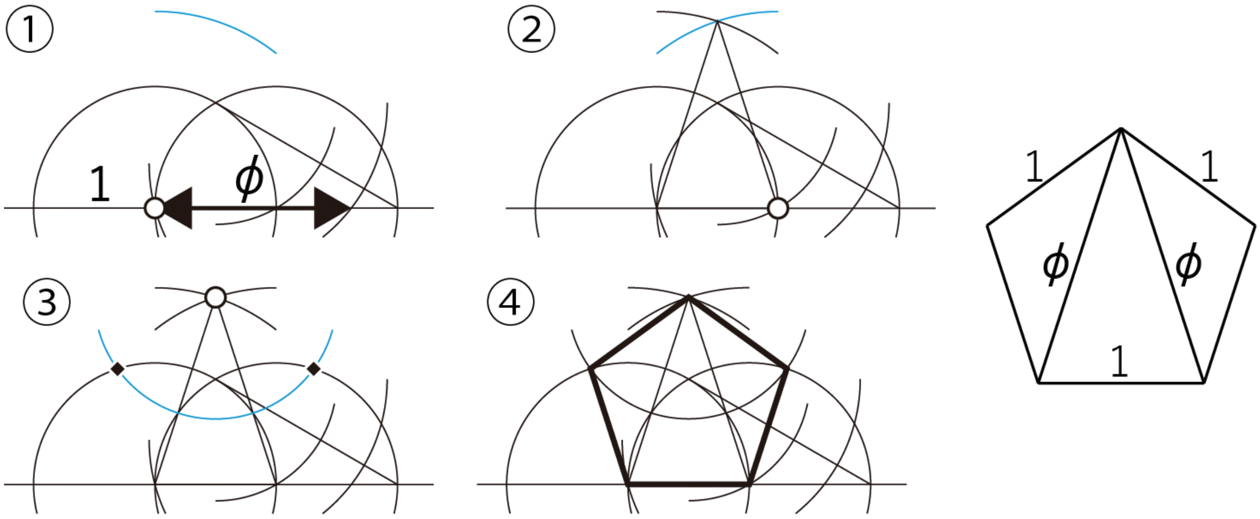

図３　正五角形の作図法とその性質

4．ケプラー三角形と黄金長方形[5)]

この三つ輪を使うと、斜辺と短辺の比が黄金比になっているケプラー三角形ができる。黄金長方形は縦と横の長さが黄金比になっているもので、これも容易に作図できる。

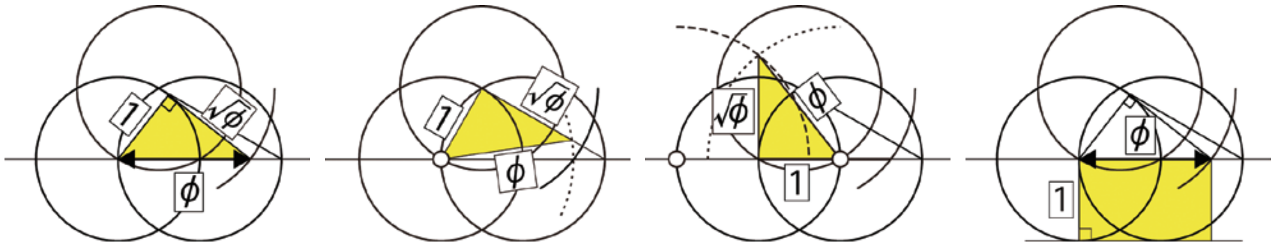

図４　ケプラー三角形と黄金長方形

図４左は、接線を引いたものであるが、実際に引こうとすると、接点が不明確である。それを解決したのが、次の右図である。しかし、この三角形は傾いている。それを解決したのが、次の右図である。

５．正多角形の作図法

5.1　ひな型の図形

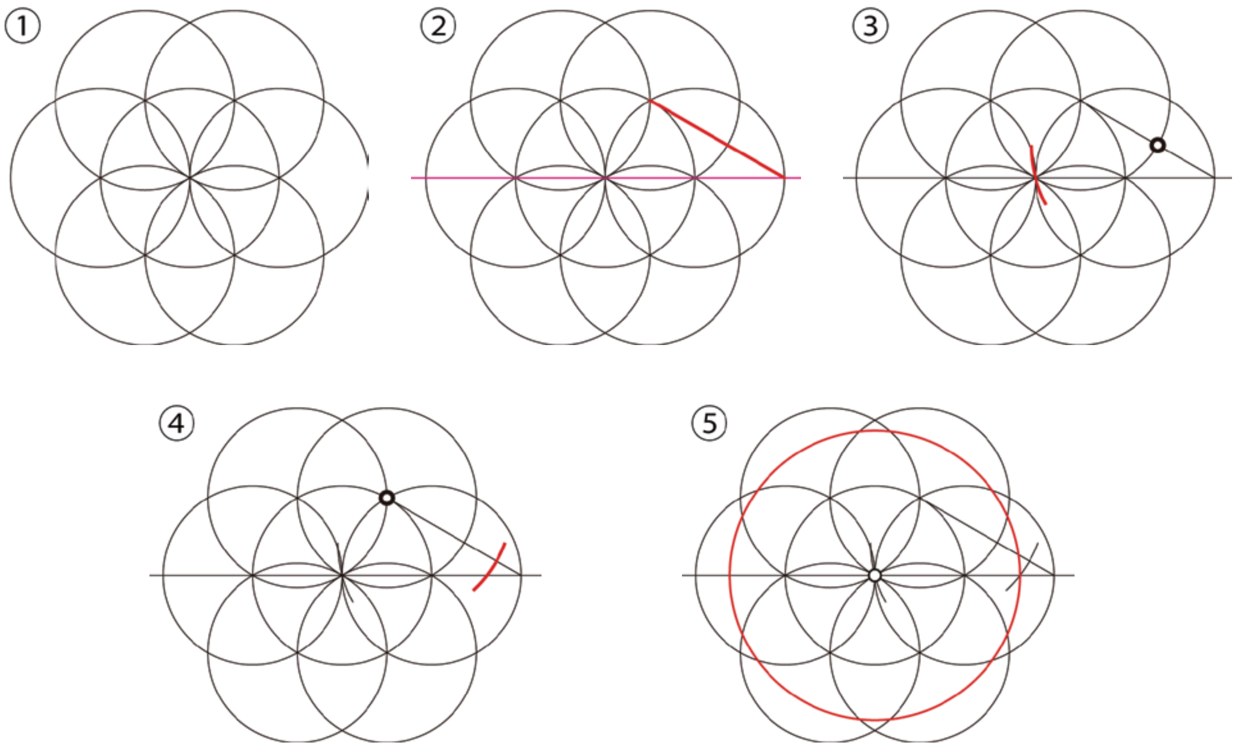

図５　ひな型となる図形の作図法

図５①で、ヒナギクのような図形を描く。この図形は、小学校３年の教科書にも作図問題として載っている[6)]。交点にコンパスの針を次から次に置いて描いていくと、自然に描ける。②〜④は、既に述べた黄金比の作図法と同じものである。⑤で、半径が黄金比となる円を描く。これが、ひな型となる図形である。

5.2　正多角形の作図

図中の■と■を通る直線を引いて、交点を得る。正20角形までの正多角形が、コンパスなしで作図できる。ただし、３、４、５、６、(７)、８、(９)、10、(11)、12、(13)、(14)、15、16、<17>、(18)、(19)、20のうち、( ) は理論的にコンパスと定規だけでは作図が不可能で、＜＞はこのひな型では不可能である。

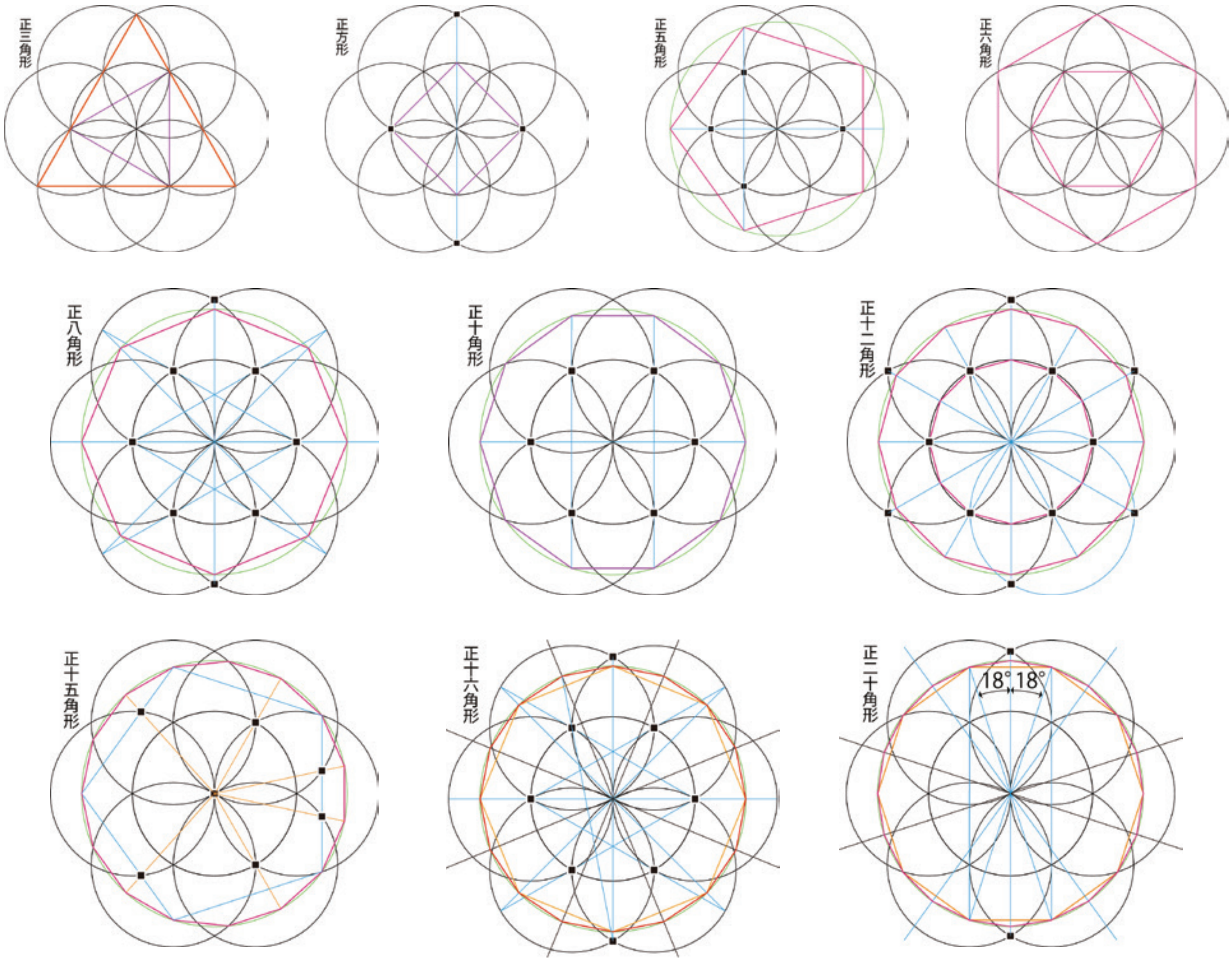

図６　正多角形の作図（正３、４、５、６、８、10、12、15、16、20角形）

正五角形は、正十角形の各頂点を一つおきに結ぶとできる。したがって、正十角形になる理由だけを示す。中心角は360度÷10角形＝36度で、図７右の正五角形の性質と正十角形が対称であることにより、中心角がどこも36度になることが分かる。

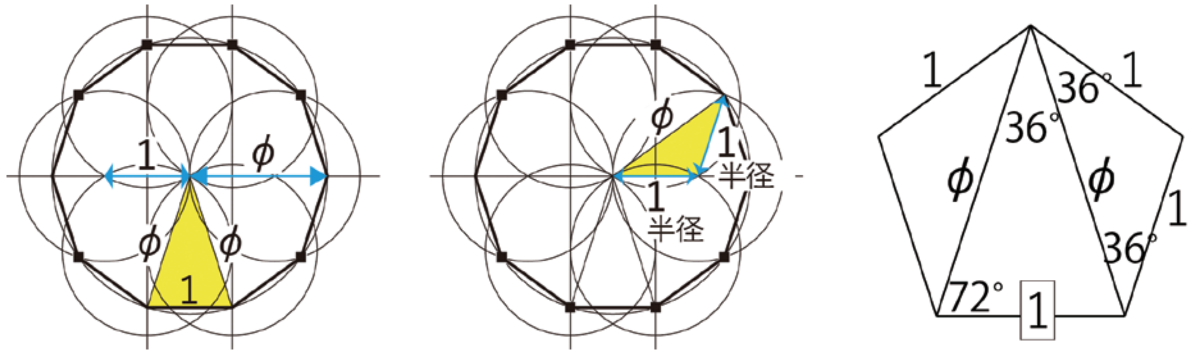

図７　正十角形になる説明

正16角形は、正８角形から作り、定規２本を使って、平行線を引くと、交点が得られる。正20角形は、正10角形から作り、直角三角形を使って、垂線を引くと、交点が得られる。さらに、正30角形も作図可能である。

６．おわりに

黄金比の新たな作図法と、続いて描ける正五角形、ケプラー三角形、黄金長方形を示した。さらに、この作図法を使って、ひな型となる図形を描くと、交点を結ぶだけで、多くの正多角形が定規だけで作図できることを示した。

平成30年告示の高等学校学習指導要領では、理数という教科ができ、「理数探究基礎」、「理数探究」という科目が新設された。数学と理科の融合科目で、2022年度から実施される。自然界には黄金比が多く見られるので、本研究の内容は、この科目の具体的な事例としても活用できると考えられる。

【参考文献】

１）ゲイリー・Ｂ・マイスナー著；赤尾秀子訳『黄金比：秘められた数の不思議』、創元社、2019。

２）Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann『The Glorious Golden Ratio』、Prometheus Books、p.16、2012。

３）アルプレヒト・ボイテルスパッヒャー、ベルンハルト・ペトリ；柳井浩訳『黄金分割―自然と数理と芸術と―』、共立出版、p.９、2005。

４）H.ヴァルサー、蟹江幸博訳『黄金分割』、日本評論社、p.32、2002。

６）清水静海ほか『わくわく算数３上』、啓林館、p.134、2016。

【引用文献】

５）Kakihara Seiji, Methods of Constructing the Golden Section, *Mathematics in School*,（2022, in press）.